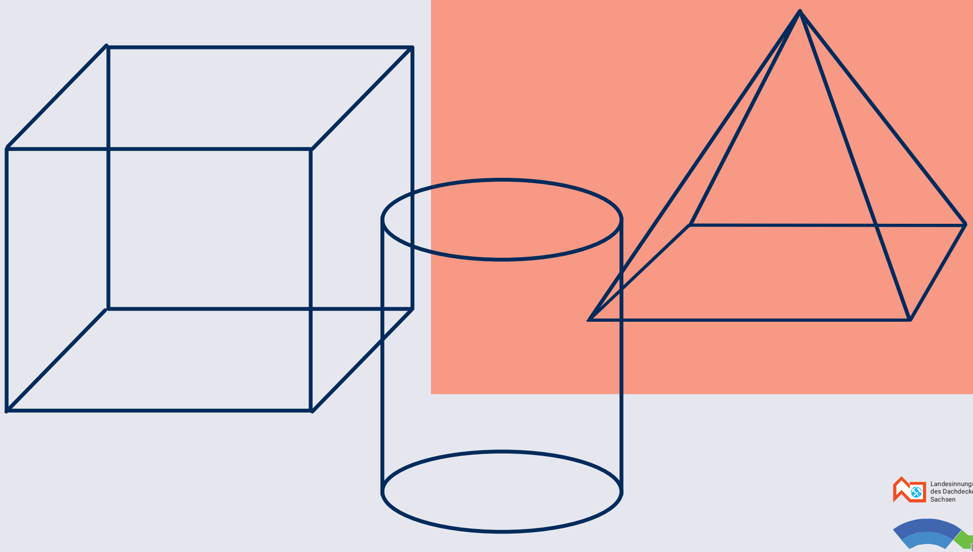
Notizen

Kapitel 6

Berechnungen an Körperoberflächen



Landesinnungsverband des Dachdeckerhandwerks Sachsen

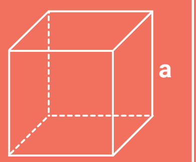
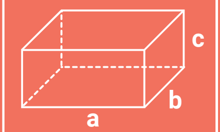
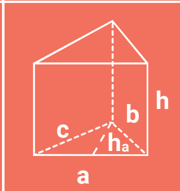
Arbeit und Leben

6.1. Allgemeines – Oberfläche und Volumen

- Die Dachfläche eines Hauses z.B. kann als Teil der **Oberfläche** eines geometrischen Körpers aufgefasst werden. Somit kann der Dachdecker zur Berechnung der Größe von Dachflächen viele Gesetzmäßigkeiten und Formeln aus dem Fachgebiet „Berechnung an geometrischen Körpern“ nutzen.
- Das Berechnen der Größe eines **Volumens** spielt dagegen im Berufsleben eines Dachdeckers nicht so die große Rolle – außer etwa bei Berechnungen des Inhalts von Dachräumen oder Gebäuden.
- Somit steht also auch hier die Berechnung des Oberflächeninhaltes von Körpern im Vordergrund gegenüber der Berechnung ihres Volumens (Rauminhaltes).
- Geometrische Körper kann man einteilen in
  - ebenflächig begrenzte Körper (z. B. Würfel, Quader, Prisma, Pyramide)
  - krummflächig begrenzte Körper (z. B. Kugel, Zylinder, Kegel)
- Viele Körper haben Grundfläche und Mantelfläche = Summe der Seitenflächen
  - Manche haben eine Grund-, eine Deck- und eine Mantelfläche (Prisma, Zylinder)
  - Andere haben eine Grundfläche und eine Mantelfläche (Pyramide, Kegel)

6.2. Berechnungen an Würfel, Quader, Prisma

Formeln zur Berechnung des Oberflächeninhaltes und des Volumens

Name	Würfel	Quader	Prisma
Skizze des Körpers mit Beschriftung	 **Alle Kanten** sind gleichlang	 **Parallele** Kanten sind gleichlang	 Grund- u. Deckfläche kongruent, Kanten h sind parallel
Oberflächeninhalt A_O	$A_O = 6 \cdot a^2$	$A_O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$	$A_O = 2 \cdot A_G + A_M$
Grundflächeninhalt A_G			hier: $A_G = \frac{a \cdot h_a}{2}$
Mantelflächeninhalt A_M			hier: $A_M = a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h$
Formel für Volumen	$V = a^3$	$V = a \cdot b \cdot c$	$V = A_G \cdot h$ hier: $A_G = a \cdot b$

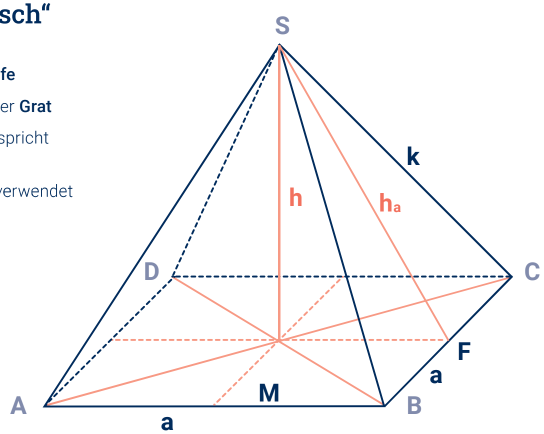
6.3. Berechnungen an Pyramiden

6.3.1. Allgemeine Aussagen – Grundbegriffe

- Pyramiden haben stets eine **Grundfläche A_G** und eine **Mantelfläche A_M**.
- Grundfläche einer Pyramide kann sein: Quadrat, Rechteck, jede Art von Dreieck, Sechseck, … aber z.B. **kein** Kreis. **Die Grundfläche der Pyramide ist eckig!**
- Die **Mantelfläche** einer Pyramide besteht stets aus Dreiecken - und zwar aus so vielen Dreiecken, wie die Grundfläche Seiten hat.
  Beispiel: Eine Pyramide mit einem Quadrat als Grundfläche hat eine Mantelfläche, die aus vier (dreieckigen) Seitenflächen besteht.
- Berechnungen an Pyramiden hängen also vorwiegend von der **Form der Grundfläche und** von der **Körperhöhe h** ab.

Grundbegriffe im „Dachdeckerdeutsch“

a	Grundkante ist die **Traufe**
k	Seitenkante verwendet er **Grat**
h	Höhe der Pyramide entspricht der **Dachhöhe D_h**
h_a	Höhe der Seitenfläche verwendet er die **Sparrenlänge S**



Allgemeine Formeln:

für den **Oberflächeninhalt** einer Pyramide: $A_O = A_G + A_M$

für das **Volumen** einer Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

HINWEIS

h_a kann berechnet werden mit dem „Pythagoras" im rechtwinkeligen Dreieck **MFS** (rosa):

$$h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

6.3.2. Überlegungen an der quadratischen Pyramide

Oberflächeninhalt allgemein: $A_O = A_G + A_M$ (*)

Bei quadratischer Pyramide gilt:

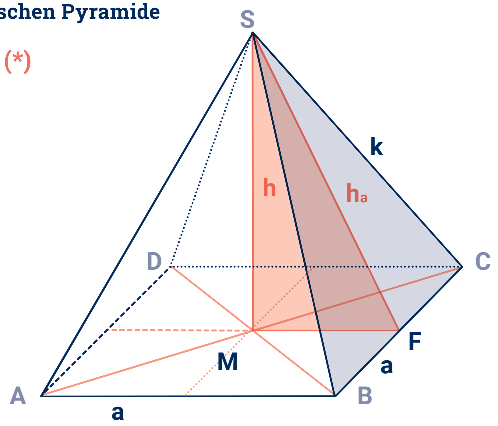
- für die Grundfläche: $A_G = a^2$
- für die Mantelfläche: $A_M = 4 \cdot A_S$

Die Seitenflächen A_S sind hier **4 Dreiecke** mit der Grundseite a und der Höhe h_a z.B. das Dreieck **BCS** (hellblau)

Jedes der 4 hat den Flächeninhalt $A_S = \frac{a \cdot h_a}{2}$

Eingesetzt in (*), ergibt sich somit für den **Oberflächeninhalt** einer **quadratischen Pyramide:**

$$A_O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$$



HINWEIS

h_a kann berechnet werden mit dem „Pythagoras" im rechtwinkeligen Dreieck **MFS** (rosa):

$$h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

h_b kann berechnet werden mit dem „Pythagoras" im rechtwinkeligen Dreieck **MGS** (rosa):

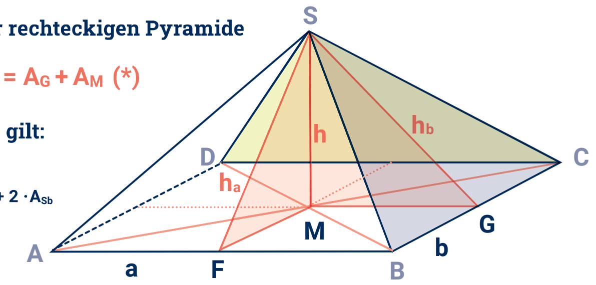
$$h_b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

6.3.3. Überlegungen an der rechteckigen Pyramide

Oberflächeninhalt allgemein: $A_O = A_G + A_M$ (*)

Bei rechteckiger Pyramide gilt:

- für die Grundfläche: $A_G = a \cdot b$
- für die Mantelfläche: $A_M = 2 \cdot A_{Sa} + 2 \cdot A_{Sb}$



Die Seitenflächen sind hier **2 Dreiecke** mit der Grundseite a und der Höhe h_a.
⟶ Dreiecke **ABS** und **CDS** (limone)

und **2 Dreiecke** mit der Grundseite b und der Höhe h_b
⟶ Dreiecke **DAS** und **BCS** (hellblau)

Somit gilt: **2 Dreiecke** haben den Flächeninhalt $A_{Sa} = \frac{a \cdot h_a}{2}$

2 Dreiecke haben den Flächeninhalt $A_{Sb} = \frac{b \cdot h_b}{2}$

Eingesetzt in (*), ergibt sich somit für den **Oberflächeninhalt** einer **rechteckgigen Pyramide:** $A_O = a \cdot b + 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2}$

6.3.4. Formeln zur Berechnung an Pyramiden

Name	Quadratische Pyramide	Rechteckige Pyramide	Regelmäßige dreieckige Pyramide
Grundfläche der Pyramide ist ein ...	Quadrat	Rechteck	gleichseitiges Dreieck (alle 3 Seiten gleich lang)
Formel für Grundflächeninhalt	$A_G = a^2$	$A_G = a \cdot b$	$A_G = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$
Formel für Mantelflächeninhalt	$A_M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$	$A_M = 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2}$	$A_M = 3 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$ $\left(h_a^2 = h^2 + \frac{1}{3} \cdot a^2\right)$
Formel für Oberflächeninhalt	$A_O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$	$A_O = a \cdot b + 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2}$	$A_O = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 + 3 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$
Formel für Volumen	$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$	$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$	$V = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot a^2 \cdot h$

6.3.5. Beispielaufgabe

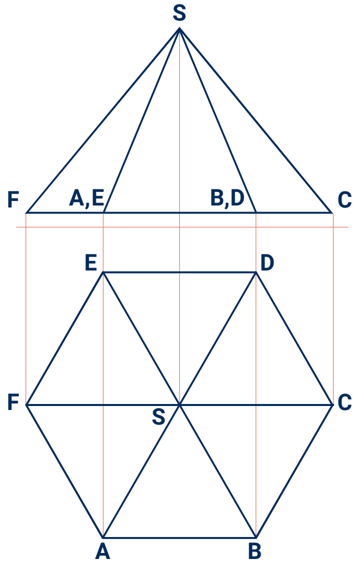
Aufgabenstellung

Ein Turm habe die **Form eines regelmäßigen Sechseckes**. Die Dachziegel seines Daches sollen erneuert werden. Jeder Grat soll dabei mit Aluprofil unterlegt werden.

Gegeben ist die Zweitafelprojektion des Turmdaches (Grundriss und Aufriss bzw. Draufsicht und Vorderansicht). Zur besseren Unterscheidung sind die Hilfslinien rot dargestellt.

Jede der Dachunterkanten (Traufe) habe eine Länge von 2,40 m. Die Dachhöhe betrage 5,50 m.

Berechne, wie groß die zu erneuernde Dachfläche ist und wie viele laufende Meter Aluprofil benötigt werden.



Problemanalyse

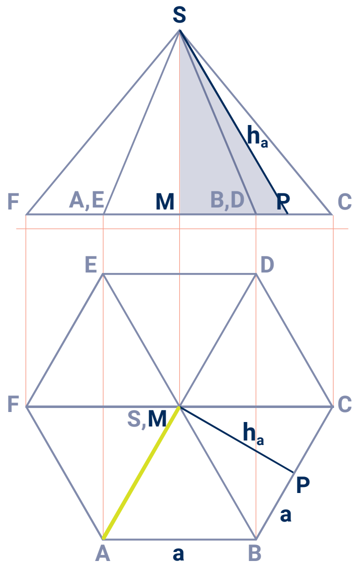
Bei diesem Turmdach handelt es sich um eine **regelmäßige sechsseitige Pyramide**. Also ist die Grundfläche ein gleichseitiges Sechseck. Somit suchen wir nach Gesetzmäßigkeiten am regelmäßigen Sechseck.

Die **Dachfläche** besteht aus den sechs dreieckigen Seitenflächen dieser Pyramide. Es ist also die Größe der Mantelfläche zu berechnen.

Um den Flächeninhalt einer Seitenfläche zu berechnen, benötigt man die Höhe h_a mit dem Fußpunkt P. Die Berechnung von h_a im Dreieck **MPS** (hellblau) sollte durch Anwendung des „Pythagoras" gelingen.

Jeder **Grat** ist eine der schrägen Seitenkanten der Pyramide – also die Seite einer Seitenfläche, z.B. Strecke $\overline{AS}$ (limone).

Die Gesamtlänge der 6 Grate ist gesucht.



Gesetzmäßigkeiten am Sechseck

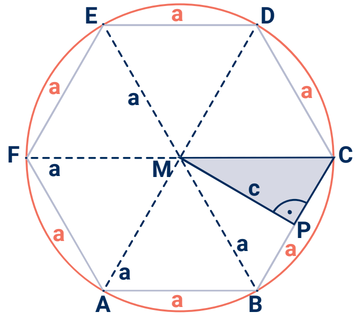
Wir betrachten nun erst einmal die **Grundfläche** des Daches, also ein regelmäßiges Sechseck, bei dem ja alle Seiten gleichlang sind ($a = \overline{AB} = \overline{BC} = ...$).

Wir zeichnen die Diagonalen in das Sechseck. Sie schneiden einander in einem Punkt M. Es entstehen sechs Dreiecke, z.B. Dreieck **ABM**, Dreieck **BCM**, usw..

Wir zeichnen um M einen Kreis (rot) und verwenden dazu den **Radius a**.

Wir stellen fest: Alle Eckpunkte des Sechseckes ABCDEF liegen auf der Kreislinie.

Daraus folgt: $\overline{AM} = \overline{BM} = ... = a$



Das wiederum bedeutet, dass diese **sechs Dreiecke gleichseitig** sind. Die Länge der Seiten dieser gleichseitigen Dreiecke ist uns also bekannt und wir können losrechnen.

Wir kennzeichnen den Mittelpunkt **P** der Seite $\overline{BC}$ und berechnen die Länge der **Seite c =** $\overline{PM}$ des Dreiecks **PCM** (hellblau).

$$a^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$c^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$c = \sqrt{2,40\,m^2 - \left(\frac{2,40\,m}{2}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{c = 2,08\,m\ \ (2,0784...)}}$$

Berechnung der Dachfläche

Eine Dachkante habe eine Länge von 2,40 m. Die Dachhöhe betrage 5,50 m. Berechne, wie groß die zu erneuernde Dachfläche ist.

gegeben: $a = 2,40\,m$ **gesucht:** A_M
$h = 5,50\,m$
$c = 2,08$ (liegt hier "unter" h_a innerhalb der Grundfläche)

Lösung:

$$A_M = 6 \cdot A_S$$

$$A_M = 6 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$$

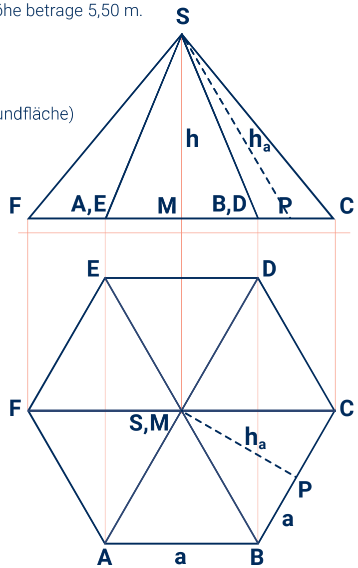
$$A_M = 6 \cdot \frac{2,40\,m \cdot 5,88\,m}{2}$$

$$\underline{\underline{A_M = 42,33\,m^2\ \ (42,3333...)}}$$

$$h_a = \sqrt{h^2 + c^2}$$

$$h_a = \sqrt{(5,50\,m)^2 + (2,08\,m)^2}$$

$$h_a = 5,88\,m\ \ (5,8796...)$$



Berechnung der Länge des Aluprofils

Eine Dachkante habe eine Länge von 2,40 m. Die Dachhöhe betrage 5,50 m. Berechne, wie viele laufende Meter Aluprofil benötigt werden.

Es muss zuerst die Länge **s** einer Seitenkante berechnet werden. Dazu nutzen wir das rechtwinklige Dreieck **MCS** (hellblau).

gegeben: a = 2,40 m, h = 5,50 m **gesucht:** l

Lösung:

$l = 6 \cdot s$

$l = 6 \cdot 6{,}00\,m$

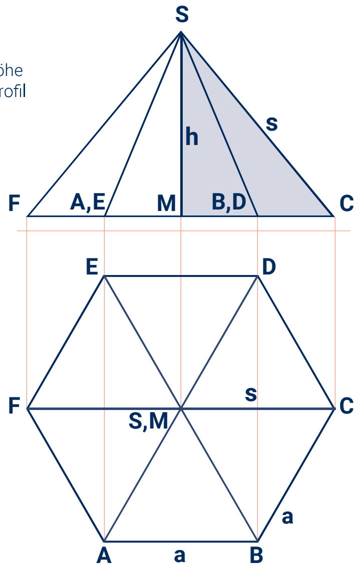
$\underline{\underline{l = 36{,}00\,m\ (36{,}005)}}$

$s = \sqrt{h^2 + a^2}$

$s = \sqrt{(5{,}50\,m)^2 + (2{,}40\,m)^2}$

$s = 6{,}00\,m\ (6{,}00083...)$

Die zu reparierende Dachfläche beträgt 42,33 m².
Es werden 36,00 lfd. m Aluprofil benötigt.



6.4. Berechnungen an Kugel, Zylinder und Kegel

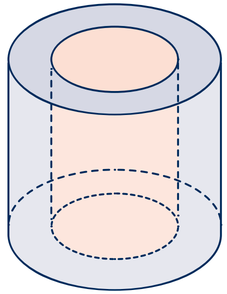
Formeln zur Berechnung an krummflächig begrenzten Körpern

Name	Kugel	(Kreis-) Zylinder	(Kreis-) Kegel
Grundfläche des Körpers ist ein…	hat keine Grundfläche	Kreis	Kreis
Inhalt (bzw. Umfang) der Grundfläche	–	$A_G = \pi \cdot r^2$ ($u_G = 2 \cdot \pi \cdot r$)	$A_G = \pi \cdot r^2$ ($u_G = 2 \cdot \pi \cdot r$)
Formel für Mantelflächeninhalt	–	$A_M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ ($A_M = u \cdot h$ / ist ein Rechteck)	$A_M = \pi \cdot r \cdot s$ (s ist eine Mantellinie)
Formel für Oberflächeninhalt	$A_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$A_O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r^2$	$A_O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
Formel für Volumen	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

6.4.1. Beispielaufgabe - Berechnung am Hohlzylinder

Berechne von dem abgebildeten Kaminabzug aus Beton das Volumen (in Liter) und die Oberfläche (in Quadratmeter). Der Abzug hat einen Außendurchmesser von 45 cm, einen Innendurchmesser von 23 cm und eine Höhe von 60 cm.

HINWEIS
Diesen Körper fasst man am besten als einen auf, bei dem aus einem **äußeren Zylinder 1** (hellblau) ein **innerer Zylinder 2** (rosa) „ausgeschnitten" wurde. Ihn nennt man dann **Hohlzylinder**.



Teil 1

gegeben: $r_1 = 22{,}5\,cm$, $r_2 = 11{,}5\,cm$, $h = 60\,cm$ **gesucht:** V

Lösung:

$V = V_1 - V_2$

$V = \pi \cdot r_1^2 \cdot h - \pi \cdot r_2^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot (22{,}5\,cm)^2 \cdot 60\,cm - \pi \cdot (11{,}5\,cm)^2 \cdot 60\,cm$

$V = 70.497{,}339\,cm^3 \longrightarrow V = 70{,}497\,dm^3$

$\underline{\underline{V = 70{,}5\,l}}$

Teil 2

gegeben: $r_1 = 22{,}5\,cm$, $r_2 = 11{,}5\,cm$, $h = 60\,cm$ **gesucht:** A_O

Lösung:

$A_O = A_{O1} - 2 \cdot A_{G2} + A_{M2}$

$A_O = (2 \cdot \pi \cdot r_1^2 + 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot h) - (2 \cdot \pi \cdot r_2^2) + (2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot h)$

$A_O = (2 \cdot \pi \cdot (22{,}5\,cm)^2 + 2 \cdot \pi \cdot 22{,}5\,cm \cdot 60\,cm) - (2 \cdot \pi \cdot (11{,}5\,cm)^2) + (2 \cdot \pi \cdot 11{,}5\,cm \cdot 60\,cm)$

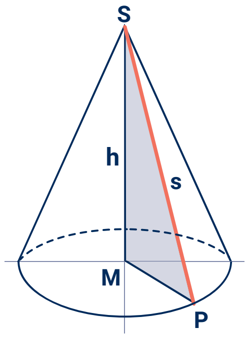
$A_O = 15.167{,}609\,cm^2$

$\underline{\underline{A_O = 1{,}52\,m^2}}$

6.4.2. Beispielaufgabe - Berechnungen an Kugel, Zylinder und Kegel

Berechne von einem kegelförmigen Dach mit einem Durchmesser von 8,40 m und einer Höhe von 4,90 m die Größe der Dachfläche und das Volumen des Dachraumes.

HINWEIS
Eine Verbindung der Spitze **S** eines Kegels mit einem beliebigen Punkt **P** auf dem Umfang der Grundfläche heißt **Mantellinie s**. Eine Mantellinie hat die Länge $s = \overline{PS}$ (rot) und ist die Hypotenuse des so entstandenen rechtwinkligen Dreieckes **MPS** (hellblau) → **Pythagoras!**



Teil 1

gegeben: $r = 4{,}20\ m$
$h = 4{,}90\ m$

gesucht: A_M

Lösung: $A_M = \pi \cdot r \cdot s \longrightarrow s = \sqrt{h^2 + r^2}$

$A_M = \pi \cdot 4{,}20\ m \cdot 6{,}45\ m$

$s = \sqrt{(4{,}90\ m)^2 + (4{,}20\ m)^2}$

$\underline{\underline{A_M = 85{,}15\ m^2\quad (85{,}1543...)}}$

$s = 6{,}45\ m\quad (6{,}4536...)$

Teil 2

gegeben: $r = 4{,}20\ m$
$h = 4{,}90\ m$

gesucht: V

Lösung: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4{,}20\ m)^2 \cdot 4{,}90\ m$

$\underline{\underline{V = 90{,}5\ m^3\quad (90{,}5155...)}}$

Übungen

Aufgabe 6.1.

Ergänze in der Tabelle für verschiedene Quader mit den Kanten a, b und c jeweils den Oberflächeninhalt A_O und das Volumen V.

Rechteck	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Kante a in m	2	2	9	8	0,40	1,50	0,80	6,00
Kante b in m	3	2	7	6	0,60	3,00	2,50	1,20
Kante c in m	4	2	5	3	0,30	5,00	3,00	1,20
Berechne:								
A_O in m²								
V in m³								

Ergänze in der Tabelle für verschiedene Quader mit den Kanten a, b und c, dem Oberflächeninhalt A_O und dem Volumen V die jeweils fehlenden Werte.

Rechteck	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16
Kante a in m	3	3	3	6			0,30	1,20
Kante b in m	4	3			8	5	0,40	
Kante c in m			1	8	10	7		0,90
Berechne:								
A_O in m²		54		292		358		5,52
V in m³	60		6		480		0,240	
Schwierigkeit		!!		!!		!!	!	!!!

Gehirn-jogging!

HINWEIS
Wenn nicht anders angegeben, erfolgen Maßangaben bei Skizzen stets in Meter.

Übungen

Aufgabe 6.2.

An einem quadratischen Prisma ist die Grundkante 92 cm lang und die Höhe beträgt 1,35 m.
Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen dieses Prismas.

Aufgabe 6.3.

Ein Würfel habe eine Kantenlänge von 8,6 dm.

a. Berechne seinen Oberflächeninhalt und sein Volumen. Gib das Ergebnis in Quadratmetern bzw in Litern an. Runde auf jeweils 2 Stellen.

b. Berechne die Länge der Raumdiagonalen in Meter. Runde das Ergebnis auf zwei Dezimalstellen.

Aufgabe 6.4.

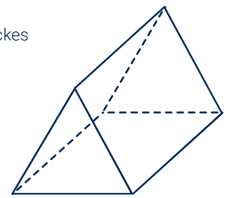
Der Giebel eines Satteldaches hat die Form eines gleichseitigen Dreieckes und ist 10,00 m breit. Die Traufe ist 14,00 m lang.

a. Berechne die Größe der Dachfläche.

b. Berechne die Dachhöhe.

c. Berechne den Inhalt einer Giebelfläche.

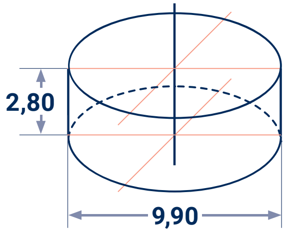
d. Berechne das Volumen des Daches.



Aufgabe 6.5.

Das dargestellte Silo soll vor der weiteren Bearbeitung mit einem Bitumenvoranstrich versehen werden.

Wieviel 10-Liter-Eimer mit diesem Voranstrich werden benötigt, wenn für einen Quadratmeter 0,3 l des Anstrichstoffes ausreicht?



Aufgabe 6.6.

Skizziert ist hier die Giebelwand einer 32,00 m langen Werkhalle mit halbkreisförmigem Dach.

Folgendes ist zu berechnen:

a. der Flächeninhalt einer Seitenwand

b. der Flächeninhalt einer Giebelwand

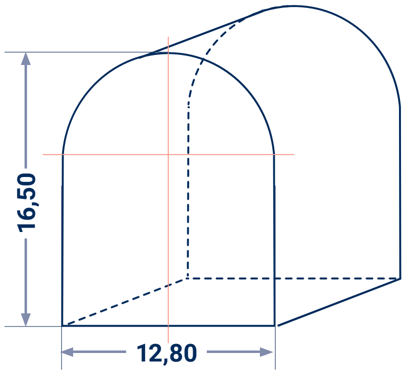
c. die Gesamtwandfläche der Halle

d. die Länge eines Ortrandes

e. die Größe der Dachfläche

f. das Volumen des Dachraumes

g. der umbaute Raum der gesamten Halle



Übungen

Aufgabe 6.7.

Das quadratische Zeltdach eines denkmalgeschützten Wachturms soll restauriert werden.
Das pyramidenförmige Dach hat eine Breite von 6,80 m und eine Höhe von 2,40 m.

a. Entscheide durch Überlegung (eventuell mit einer Skizze), ob ein eher flaches (Dachneigung $\alpha < 45°$) oder ein eher steiles ($\alpha > 45°$) Dach vorliegt.

b. Berechne:
1. den Inhalt der Dachgrundfläche,
2. die Länge des längsten Sparrens einer dreieckigen Dachseite,
3. die Größe der Dachfläche insgesamt,
4. die Gratlänge,
5. die Dachneigung in Grad.

Aufgabe 6.8.

Ein pyramidenförmiges Dach mit rechteckigem Grundriss hat eine Länge von 8,50 m, eine Breite von 7,90 m und eine Höhe von 6,30 m.

a. Berechne die jeweils maximale Sparrenlänge der beiden verschieden großen Dachseiten.

b. Berechne die Länge des Gratsparrens.

c. Berechne den Inhalt der Dachfläche.

Aufgabe 6.9.

Das kegelförmige Dach eines Rundturms soll instandgesetzt werden.
Es hat eine Höhe von 3,70 m und einen Durchmesser von 3,20 m.

a. Berechne den Inhalt und den Umfang der Dachgrundfläche.

b. Berechne die maximale Sparrenlänge.

c. Berechne den Inhalt der Dachfläche.

d. Berechne das Volumen des Daches. Runde auf Kubikmeter.

Aufgabe 6.10.

Das abgebildete kegelförmige Kirchturmdach soll umgebaut werden.
Dabei wird eine Zwischendecke eingezogen, die das Dach teilt.

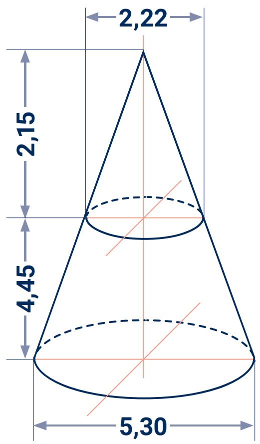
a. Berechne den Dachraum V_{ges} des gesamten Daches.

b. Berechne das Volumen V_o der oberen Spitze des Turmdaches.

c. Berechne das Volumen V_u des durch die Zwischendecke entstandenen unteren Teils des Turmdaches.

d. Berechne den Inhalt A_{Dges} der gesamten Dachfläche.

e. Berechne den Inhalt A_{Du} des unteren Teils der Dachfläche.



HINWEIS
Wenn nicht anders angegeben, erfolgen Maßangaben bei Skizzen stets in Meter.